Chapitre 10

La dérivabilité d'une fonction numerique

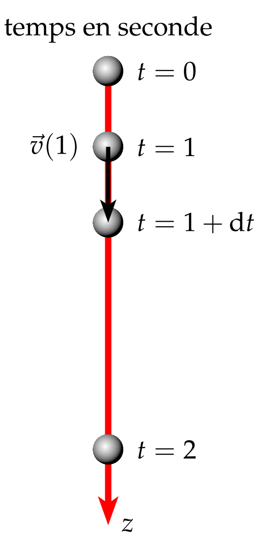
I) Un problème historique

La notion de fonction dérivée ne s'est pas construite en un jour. Un petit problème historique va nous permettre de comprendre les difficultés qu'ont rencontrées les mathématiciens pour définir la fonction dérivée.

Tout commence avec Newton (1643-1727) avec la détermination de la vitesse instantané pour un objet en chute libre.

Exemple : Soit une pierre que l'on lâche à $t = 0$ s. Quelle est sa vitesse instantanée au bout d'une seconde ?

Newton savait depuis Galilée que si l'on néglige la force de frottement de l'air sur une pierre (matière compacte), sa vitesse ne dépend pas de sa masse. Galilée a pu déterminer l'équation horaire (position de l'objet en fonction du temps) d'un objet en chute libre. Cette équation est de la forme, en prenant $g = 10$ m.s^{-2} comme accélération de la pesanteur :



$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

Pour calculer la vitesse instantanée en $t = 1$, on mesure la distance entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + dt$, où l'intervalle de temps dt est le plus petit possible (quantité infinitésimal).

$$v(1) = \frac{z(1 + dt) - z(1)}{dt}$$

$$v(1) = \frac{5(1 + dt)^2 - 5}{dt}$$

$$v(1) = \frac{5 + 10dt + 5dt^2 - 5}{dt}$$

$$v(1) = 10 + 5dt$$

A.AFAADAS a.afaadas@gmail.com

Pour Newton la vitesse en $t = 1$ s est de 10 m.s^{-1}. Mais la vitesse est-elle exactement égale à 10 m.s^{-1} ou d'environ 10 m.s^{-1} ?

- Si la vitesse est exactement de 10 m.s^{-1} alors $\mathrm{d}t = 0$
- mais si $\mathrm{d}t = 0$, la notion de vitesse instantanée n'a aucun sens : le dénominateur est nul.
- Si la vitesse instantanée est d'environ 10 m.s^{-1} comment calculer la vitesse exacte ?

Ce problème a opposé les mathématiciens. Les uns donnaient raison à Newton, les autres critiquaient sa méthode peu rigoureuse.
Ce blocage ne fut résolu qu'au XIX^e siècle avec la notion de limite. Si cette notion de limite est cette fois rigoureuse, elle a malheureusement complexifiée le problème de départ. Avec ce nouveau concept de limite, la vitesse instantanée en $t = 1$ vaut :

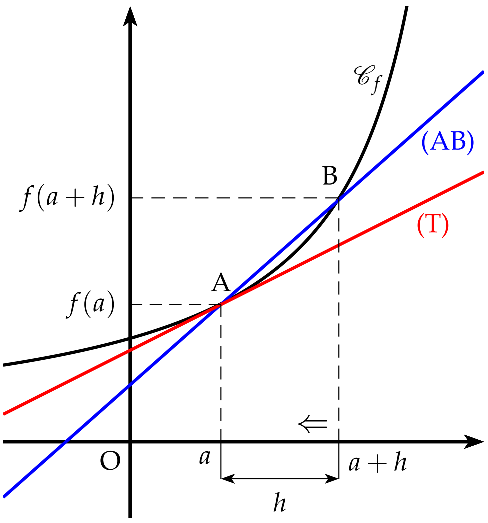
$$v(1) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse en 1 est la limite quand $\mathrm{d}t$ tend vers 0 de la variation d'altitude, $\mathrm{d}z$, sur la variation de temps $\mathrm{d}t$.

Remarque **:** La notion rigoureuse de limite sera vue en terminale. Pour ce chapitre nous nous contenterons d'utiliser la méthode intuitive de Newton.

II) Le nombre dérivé

1) Définition



Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$.
Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

- On appelle **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre t défini par :
$$t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- La fonction f admet un **nombre dérivé**, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a **admet une limite**, c'est à dire :
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque :

- On utilisera par la suite la première notation.
- Les physiciens utilisent la notation appelée différentielle : $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

2) Dérivabilité a gauche et a` droite

Définition

Soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si le taux d'accroissement de f admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à droite (resp. à gauche) et on note $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ resp. $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Proposition

Soit x_0 un point intérieur à I. Alors
f est dérivable en x_0 ssi $\left(f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \textbf{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)\right)$.
Dans ce cas $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Interprétation graphique : si f n'est pas dérivable en x_0 mais l'est à droite (ou à gauche) en x_0, on dit que f admet une demi-tangente en x_0 (même équation en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_d(x_0)$ (ou $f'_d(x_0)$).)

Exemple important :

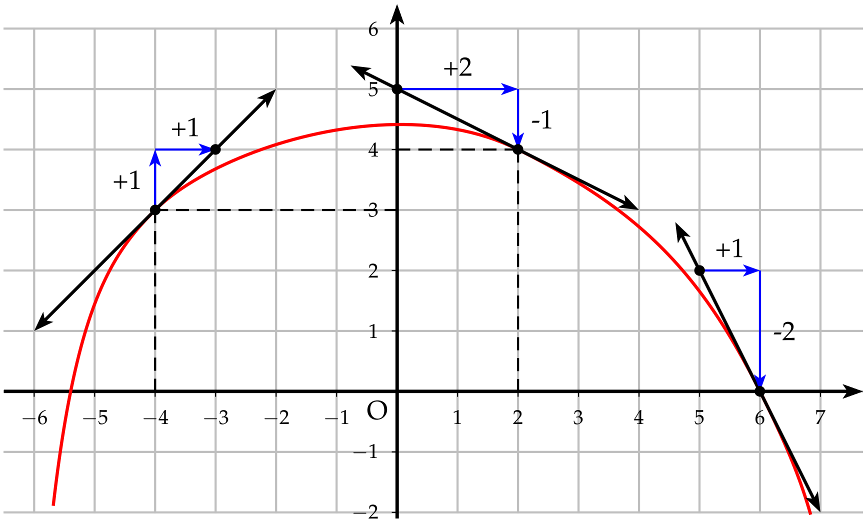
$f : x \to |x|$ admet une dérivée a gauche et a droite en 0 : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.
$1 \neq -1$,(0 est un point anguleux) donc f n'est pas déivable en 0 .

3) Exemples

Deux exemples graphiques pour montrer la signification du nombre dérivé.

La courbe représentative f est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $f(-4)$ et $f'(-4)$
- $f(2)$ et $f'(2)$
- $f(6)$ et $f'(6)$



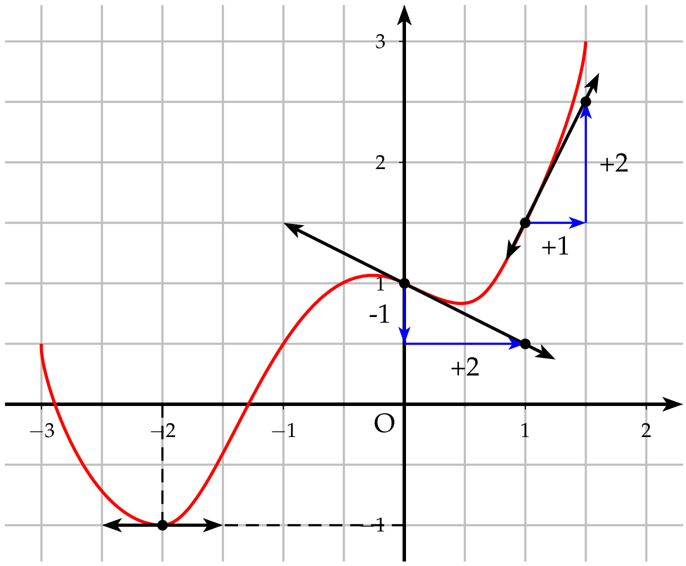
On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f'(-4) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(-2) = 4 \\ f'(2) = \dfrac{-1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(6) = 0 \\ f'(6) = \dfrac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \Longrightarrow$

La courbe représentative g est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $g(-2)$ et $g'(-2)$
- $g(0)$ et $g'(0)$
- $g(1)$ et $g'(1)$



On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} g(-2) = -1 \\ g'(-2) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(1) = 1,5 \\ g'(1) = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

III) Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires

1 Fonction dérivée

Définition **:** Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Si la fonction f admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I. La fonction, notée f', définie sur I qui a tout x associe son nombre dérivé est appelée **fonction dérivée** de f.

Remarque **:** Le but du paragraphe suivant est de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles opératoires afin de pou-voir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

2) Fonction dérivée des fonctions élémentaires

a) Fonction affine

Soit f la fonction affine suivante : $f(x) = ax + b$

La fonction affine est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons

le taux d'accroissement en x :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} a = a$

b) Fonction carrée

Soit f la fonction carrée : $f(x) = x^2$

La fonction carrée est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en x :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x+h = 2x$

c) Fonction puissance (admis)

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^n)' = nx^{n-1}$

Exemple : Soit $f(x) = x^5$ on a alors $f'(x) = 5x^4$.

d) Fonction inverse

Soit f la fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h\times x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

e) Fonction puissance inverse (admis)

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ on a alors $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$.

f) Fonction racine

Soit f la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ La fonction racine est définie mais pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 et donc l'équation de cette tangente n'admet pas de coefficient directeur.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On passe à la limite :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Règles de dérivation

Dans tout ce paragraphe, on considère deux fonctions u et v et un réel λ

b) Dérivée de la somme

On peut montrer facilement que la dérivée de la somme est la somme des dérivée car $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$

La dérivée de la somme : $\boxed{(u+v)' = u'+v'}$

Exemple : Soit la fonction f telle que : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

en appliquant la règle de la somme : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

b) Produit par un scalaire

On peut montrer facilement que la dérivée du produit par un scalaire est le produit du scalaire par la dérivée car $(\lambda\, u)\,(x) = \lambda\, u(x)$

La dérivée du produit par un scalaire : $\boxed{(\lambda\, u)' = \lambda\, u'}$

Exemple : Soient : $f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$

en appliquant la règle ci-dessus : $f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$
en appliquant les deux règles : $g'(x) = 15x^2 + 24x - 7$

c) Dérivée du produit

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de $(uv)\,(x) = u(x)v(x)$:

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\
&= v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}
\end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}
(uv)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} v(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} u(x) \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= v(x)u'(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

La dérivée du produit : $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

⚠ La dérivée du produit n'est malheureusement pas le produit des dérivées !

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x + 3x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

d) Dérivée de l'inverse

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$:

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} = -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right)' &= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{v(x+h)-u(x)}{h} \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned}$$

La dérivée de l'inverse : $\boxed{\frac{1}{v} = -\frac{v'}{v^2}}$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

En appliquant la règle de l'inverse : $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

e) Dérivée du quotient

On cherche la dérivée du produit par l'inverse : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)'$

D'après la règle du produit, on obtient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

La dérivée du quotient : $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

En appliquant la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$$

f) Dérivée de la puissance et de la racine

⚠ On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine.

$$\boxed{(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exemple : Soient $f(x) = (3x-5)^5$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

En appliquant les règles sur la dérivée de la puissance et de la racine, on a :

$$f'(x) = 5 \times 3(3x-5)^4 = 15(3x-5)^4 \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4 Tableau récapitulatif

Voici le tableau des fonctions élémentaires que l'on vient de montrer ainsi que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Fonction	D_f	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Voici maintenant les principales règle de dérivation.

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

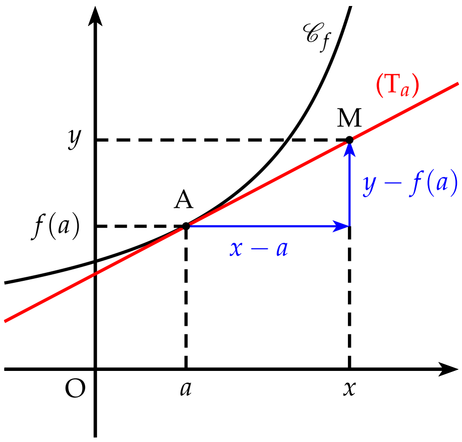
Remarque : Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

IV) Interprétations géométrique et numérique

1 Équation de la tangente

Soit la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f et (T_a) sa tangente en $x = a$.

On a alors le schéma suivant :



Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en a. Si on considère un point $\mathrm{M}(x;y)$ quelconque de cette tangente, on obtient alors :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Théorème 1 : L'équation de la tangente (T_a) en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f dérivable en a est égale à :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

$\Rightarrow \Rightarrow$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

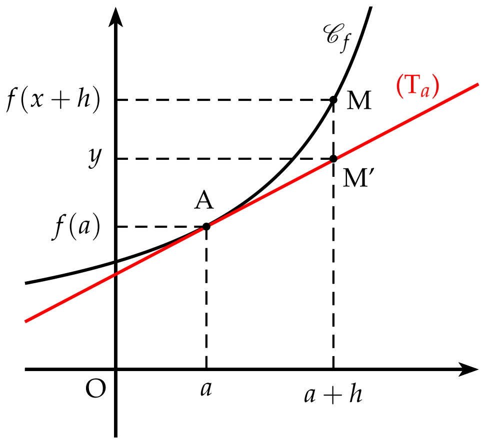
On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$
On calcule ensuite :

$$\begin{cases} f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = 8 - 12 + 6 + 4 = 6 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation de la tangente suivante :

$$y = 3(x-2) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 6 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x$$

2) Approximation affine



Lorsque x est proche de a, on peut confondre en première approximation le point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f avec le point M′ d'abscisse x de la tangente (T_a) à la courbe en a.
On pose $x = a + h$ avec h proche de 0.
Si on confond le point M avec le point M′, on a :

$$y \simeq f(a+h)$$

On obtient alors : $\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)}$

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, on a $a = 4$ et $h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\text{et donc} \quad f(4,03) \simeq f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \simeq 2,0075$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \simeq 2,0075$ à comparer à $\sqrt{4,03} \simeq 2,007\,486$. La précision est donc de 10^{-4}.

3) Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique. C'est justement l'étude de la vitesse instantannée qui a permis à Newton de concevoir le concept de dérivée. La vitesse est alors la dérivée de l'équation horaire et l'accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Exemple : Deux mobiles M_1 et M_2 sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires en fonction du temps t sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

a) Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.
b) Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.
c) En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.

a) Pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut que leurs abscisses soient les mêmes. On a donc : $x_1(t) = x_2(t)$ soit

$$2t^2 + t + 4 = -t^2 + 5t + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t - 4 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

On obtient deux solutions : $t_1 = \dfrac{4+8}{6} = 2$ ou $t_2 = \dfrac{4-8}{6} = -\dfrac{2}{3}$

On ne retient que la solution positive (on ne sait pas ce qui se passe avant $t = 0$). Les mobiles se rencontrent donc au bout de 2 secondes.

b) La vitesse est déterminée par la dérivée de la loi horaire. En dérivant, on obtient les vitesses des deux mobiles en fonction du temps :

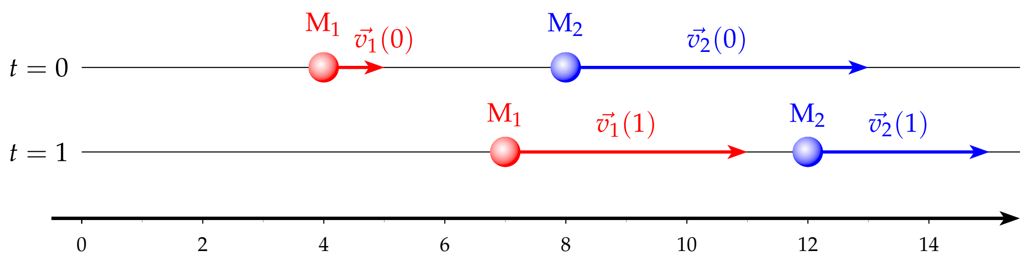
$$v_1(t) = 4t + 1 \quad \text{et} \quad v_2(t) = -2t + 5$$

Si au point de rencontre, les vitesses ont même signe, l'un des mobiles double l'autre, si les vitesses ont des signes opposées, les mobiles se croisent. Calculons les vitesses à $t = 2$.

$$v_1(2) = 9 \quad \text{et} \quad v_2(2) = 1$$

c) Les vitesses ont même signe, donc les mobiles se rencontrent, comme $v_1(2) > v_2(2)$, c'est le mobile 1 qui double le mobile 2.

Remarque : On peut simuler (position et vitesse) des deux mobiles en fonction du temps. Par exemple aux deux moments à $t = 0$ s et $t = 1$ s.



V) Sens de variation d'une fonction

1) Sens de variation

On admettra le théorème suivant qui précise le lien entre variation et dérivée.

Théorème 2 **:** Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est **nulle**, alors la fonction est **constante**.
- Si la fonction dérivée est **strictement positive** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si la fonction dérivée est **strictement négative** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Exemple : Déterminer les variations de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.
  On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

2) Extremum d'une fonction

Théorème 3 **:** Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $c \in \mathrm{I}$ est un extremum local de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si $c \in \mathrm{I}$, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I.

Exemple : Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3x(-x+2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de f, respectivement minimum et maximum.

Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.